11 класс, ВАРИАНТ 1

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

Ответ: $0,\ -2,\ -\frac{1}{2}$.

Решение. Преобразуя в левой части второго равенства сумму синусов в произведение, получаем $\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$. Подставляем в это соотношение значение синуса из первого равенства:

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta=-\frac{2}{5}\ \Leftrightarrow\ \cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}},\\ \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}.\end{array}\right.$$

Отсюда следует, что исходные равенства эквивалентны совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}},\\ \cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt{5}},\\ \sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}\quad \text{и}\quad \begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}},\\ \cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt{5}},\\ \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}.\end{cases}$$

Из первой системы получаем

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}},\\ \cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt{5}},\\ \sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha+\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Далее имеем

$$4\sin\alpha\cos\alpha+\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=-\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\Leftrightarrow 2\cos\alpha(\cos\alpha+2\sin\alpha)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0,\\ \cos\alpha=2\sin\alpha.\end{array}\right.$$

В первом случае $\operatorname{tg}\alpha$ не существует, а во втором случае $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$.

Аналогично рассматриваем вторую систему:

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}},\\ \cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt{5}},\\ \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\sin\alpha\cos\alpha-\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=-\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\Leftrightarrow 2\sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0,\\ 2\cos\alpha=-\sin\alpha.\end{array}\right.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha=0$ или $\operatorname{tg}\alpha=-2$.

Итак, возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$ – это $0,\ -2$ и $-\frac{1}{2}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

Ответ: $(6;2)$, $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

Решение. Первое уравнение при условии $x - 2y \geqslant 0$ равносильно уравнению $(x-2y)^2 = xy - x - 2y + 2$, откуда $x^2 + (1-5y)x + (4y^2 + 2y - 2) = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно переменной x, имеем $D = (1-5y)^2 - 4\left(4y^2 + 2y - 2\right) = (3y-3)^2$; $x = 4y - 2$ или $x = y + 1$. Подставляем во второе уравнение исходной системы.

Если $x = 4y - 2$, то $25y^2 - 50y = 0$, и получаем две пары $y = 0$, $x = -2$ и $y = 2$, $x = 6$.
Если $x = y + 1$, то $10y^2 - 20y - 15 = 0$, откуда также имеем две пары $y = 1 + \sqrt{\frac{5}{2}}$, $x = 2 + \sqrt{\frac{5}{2}}$ и $y = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}$, $x = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Из четырёх найденных пар чисел неравенству $x \geqslant 2y$ удовлетворяют только две из них: $(6;2)$, $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$.

Решение. Заметим, что $x^2 + 18x > 0$. Следовательно, $|x^2 + 18x| = x^2 + 18x$. Область допустимых значений – это $x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$, а неравенство эквивалентно следующим:

$$5^{\log_{12}\left(x^2+18x\right)} + \left(x^2 + 18x\right) \geqslant \left(x^2 + 18x\right)^{\log_{12} 13} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5^{\log_{12}\left(x^2+18x\right)} + 12^{\log_{12}\left(x^2+18x\right)} \geqslant 13^{\log_{12}\left(x^2+18x\right)} \quad \Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}\left(x^2+18x\right)} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}\left(x^2+18x\right)} \geqslant 1.$$

Рассмотрим неравенство $\left(\frac{5}{13}\right)^y + \left(\frac{12}{13}\right)^y \geqslant 1$. Функция $h(y) = \left(\frac{5}{13}\right)^y + \left(\frac{12}{13}\right)^y$ – убывающая (как сумма убывающих функций). Несложно заметить, что $h(2) = 1$, поэтому если $y > 2$, то $h(y) < 1$, а если $y < 2$, то $h(y) > 1$. Таким образом, это неравенство даёт $y \leqslant 2$, а исходное неравенство эквивалентно неравенству $\log_{12}\left(x^2 + 18x\right) \leqslant 2$. Отсюда получаем $0 < x^2 + 18x \leqslant 144$, $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$.

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

Ответ: $R = \frac{85}{6}$, $r = \frac{136}{15}$, $\angle AFE = 45^\circ + \frac{1}{2} \arccos \frac{15}{17}$, $S_{\triangle AEF} = \frac{2125}{12}$.

Решение. Обозначим $\angle ABC = \psi$, а радиусы Ω и ω через R и r соответственно. Пусть O и Q – центры окружностей Ω и ω соответственно; K – точка пересечения ω и AB, отличная от A.

Отметим, что $\angle BDQ = 90^\circ$ (касательная BD перпендикулярна радиусу DQ) и $\angle BCA = 90^\circ$ (угол вписан в окружность Ω и опирается на её диаметр). Значит, треугольники BDQ и BCA подобны (по двум углам). Отсюда $\frac{BD}{BQ} = \frac{BC}{BA}$, т.е. $\frac{17}{2R-r} = \frac{25}{2R}$, а значит, $R = \frac{25r}{16}$. По теореме о касательной и секущей $BD^2 = BK \cdot BA = (2R-2r)\cdot 2R = \left(\frac{25r}{8} - 2r\right)\cdot\frac{25r}{8} = \frac{225r^2}{64}$. Следовательно, $BD = \frac{15r}{8}$, $r = \frac{8\cdot BD}{15} = \frac{136}{15}$, $R = \frac{25r}{16} = \frac{85}{6}$.

Далее находим углы и дуги: $\smile AC = 2\angle ABC = 2\psi$; $\angle BQD = 90° - \angle QBD = 90° - \psi$; $\angle AQD = 180° - \angle BQD = 90° + \psi$; $\angle QAD = \frac{1}{2}(180° - \angle AQD) = 45° - \frac{\psi}{2}$; $\smile BE = 2\angle BAC = 90° - \psi$; $\smile CE = 180° - \smile AC - \smile BE = 90° - \psi$. Следовательно, $\angle AFE = \frac{1}{2}\smile AE = 45° + \frac{\psi}{2}$. Угол ψ известен, так как $\cos\psi = \frac{BC}{BA} = \frac{25}{85/3}\cdot\frac{15}{17}$. Значит, $\angle AFE = 45° + \frac{1}{2}\arccos\frac{15}{17}$.

Перейдём к нахождению площади. Треугольник AEF прямоугольный ($\angle EAF = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр), поэтому $FA = FE\cos\angle EFA$, $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}\cdot FA\cdot FE\cdot \sin\angle AFE = \frac{1}{4}FE^2\sin(2\angle AFE) = \frac{1}{4}\cdot 4R^2\sin(90° + \psi) = R^2\cos\psi = \left(\frac{85}{6}\right)^2\cdot\frac{15}{17} = \frac{2125}{12}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

Ответ: 198.

Решение. Подставляя $a = 1$ в равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, получаем $f(b) = f(1) + f(b)$, значит, $f(1) = 0$. Если же для произвольных натуральных x, y положить $a = \frac{x}{y}$, $b = y$, то получаем $f(x) = f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$, откуда $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$. Таким образом, чтобы вычислить значение функции f в произвольной положительной рациональной точке нам достаточно значения функции f для любого натурального числа.

Для простых чисел и единицы значения функции мы уже знаем. Для составных чисел значения функции могут быть найдены, если их разложить на простые множители и воспользоваться равенством $f(ab) = f(a) + f(b)$, например, $f(15) = f(3\cdot 5) = f(3) + f(5) = \left[\frac{3}{4}\right] + \left[\frac{5}{4}\right] = 0 + 1 = 1$. Аналогичным образом вычисляем значения функции для $n \in [1; 24]$ и записываем их в таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$f(n)$	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

Поскольку $f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = f(1) = 0$, то из $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ следует, что $f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$. Таким образом, количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ совпадает с количеством пар, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) > 0$. Посчитаем количество пар $(x; y)$, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Ввиду того, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, нужно найти количество пар $(x; y)$ из таблицы выше, для которых $f(x) = f(y)$. Рассмотрим несколько случаев:

- $x = y$. В данном случае имеется 24 варианта.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 0$. В таблице есть 11 аргументов, при которых $f = 0$. Выбирая пару таких аргументов, первый можно выбрать 11 способами, а второй – 10 способами. Значит, количество пар такого типа равно $11\cdot 10 = 110$.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 1$. Аналогично предыдущему пункту получаем $7\cdot 6 = 42$ пары.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 2$. Здесь $2\cdot 1 = 2$ пары.

- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 4$. Здесь также $2 \cdot 1 = 2$ пары.

Итого, есть $24 + 110 + 42 + 2 + 2 = 180$ пар натуральных чисел $(x; y)$, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Всего имеется $24^2 = 576$ пар, поэтому тех, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, ровно $\frac{576-180}{2} = 198$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

Ответ: $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$.

Решение. Рассмотрим второе неравенство. Обозначим $h(x) = -8x^2 - 30x - 17$. График – парабола с ветвями вниз. На концах данного в условии промежутка имеем $h\left(-\frac{11}{4}\right) = 5$, $h\left(-\frac{3}{4}\right) = 1$. Так как неравенство должно выполняться на всём промежутке, то точки $M\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$ и $N\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$ могут располагаться на прямой $y = ax + b$ или выше неё. Отсюда самое "высокое" расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая MN. Составляя её уравнение по двум точкам, имеем $y = -2x - \frac{1}{2}$ (назовём эту прямую ℓ).

График левой части неравенства – гипербола $g(x) = \frac{12x+11}{4x+3}$. Заметим, что она касается прямой ℓ в точке, принадлежащей промежутку $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$. Действительно, уравнение $\frac{12x+11}{4x+3} = -2x - \frac{1}{2}$ имеет единственное решение $x = -\frac{4}{5}$, и при этом $g'(x) = -\frac{8}{(4x+3)^2}$, $g'\left(-\frac{5}{4}\right) = -2$, т.е. угловой коэффициент прямой ℓ совпадает с производной функции $y = g(x)$ в их общей точке. Несложно видеть (если построить график), что на данном промежутке прямая ℓ находится выше гиперболы. Любая прямая, расположенная "ниже" прямой ℓ пересекается с гиперболой, и потому не удовлетворяет условию.

Итак, ℓ – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условию; следовательно, $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

Ответ: $BC = \sqrt{7}$, $R_{\min} = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

Решение. Пусть K, L, M, N, P – середины рёбер AB, BD, CD, AC, BC соответственно. Из теоремы о средней линии треугольника следует, что $KLMN$ и $AKPN$ – параллелограммы. Они вписаны в окружности, являющиеся сечениями сферы плоскостями KLM и ABC, поэтому эти параллелограммы – прямоугольники. Угол BAC – прямой; прямые AD и BC перпендикулярны, так как $AD \parallel KL$, $KL \perp LM$, $BC \parallel LM$.

Отметим в плоскости ABC точку D' такую, что $\triangle BCD = \triangle BCD'$, а точки A и D' лежат по разные стороны от прямой BC (треугольник BCD' может быть получен из треугольника BCD поворотом вокруг прямой BC). Из равенства треугольников BCD и BCD' следует, что основания их высот, опущенных на BC – это одна и та же точка (назовём её H). Плоскость $DD'H$ перпендикулярна BC (так как $DH \perp BC$, $D'H \perp BC$), поэтому $DD' \perp BC$. Поскольку $DD' \perp BC$ и $AD \perp BC$, то плоскость ADD' перпендикулярна BC и $AD' \perp BC$.

Значит, $ABCD'$ – четырёхугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями (пусть X – точка их пересечения). По теореме Пифагора $AB^2 = AX^2 + BX^2$, $CD'^2 = CX^2 + D'X^2$,

$BD'^2 = BX^2 + D'X^2$, $AC^2 = AX^2 + CX^2$, следовательно, $AB^2 + CD'^2 = BD'^2 + AC^2$, откуда $AC = \sqrt{1^2 + 3^2 - 2^2} = \sqrt{6}$. Из прямоугольного треугольника ABC находим $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{7}$.

Радиус сферы, описанной около пирамиды $ABCD$, не меньше радиуса R окружности, описанной около грани BCD. Пирамида, для которой достигается равенство, существует. Докажем это. Рассмотрим сферу радиуса R и окружность – её сечение, проходящее через центр сферы. Впишем в эту окружность треугольник BCD и через прямую BC проведём плоскость, перпендикулярную плоскости этого треугольника. В сечении сферы указанной плоскостью получится окружность с диаметром BC, в которую можно вписать прямоугольный треугольник ABC. По теореме косинусов из треугольника BCD находим, что $\cos\angle BDC = \frac{CD^2+BD^2-BC^2}{2\cdot CD\cdot BD} = \frac{9+4-7}{2\cdot 3\cdot 2} = \frac{1}{2}$, $\angle BDC = 60^\circ$. По теореме синусов $R = \frac{BC}{2\sin\angle BDC} = \frac{\sqrt{7}}{2\sin 60^\circ} = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

11 класс, ВАРИАНТ 2

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

Ответ: $3,\ -1,\ \frac{1}{3}$.

Решение. Преобразуя в левой части второго равенства сумму синусов в произведение, получаем $\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{1}{5}$. Подставляем в это соотношение значение синуса из первого равенства:

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta=-\frac{1}{5}\ \Leftrightarrow\ \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{aligned}&\sin 2\beta=\frac{2}{\sqrt{5}},\\&\sin 2\beta=-\frac{2}{\sqrt{5}}.\end{aligned}\right.$$

Отсюда следует, что исходные равенства эквивалентны совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}},\\ \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}},\\ \sin 2\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}},\\ \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}},\\ \sin 2\beta=-\frac{2}{\sqrt{5}}.\end{cases}$$

Из первой системы получаем

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}},\\ \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}},\\ \sin 2\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Далее имеем

$$2\sin\alpha\cos\alpha+2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=-\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\Leftrightarrow\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\sin\alpha-3\cos\alpha=0,\\&\sin\alpha+\cos\alpha=0.\end{aligned}\right.$$

В первом случае $\operatorname{tg}\alpha=3$, а во втором случае $\operatorname{tg}\alpha=-1$.

Аналогично рассматриваем вторую систему:

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}},\\ \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}},\\ \sin 2\beta=-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha-2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=-\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\Leftrightarrow 3\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&3\sin\alpha-\cos\alpha=0,\\&\sin\alpha+\cos\alpha=0.\end{aligned}\right.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha=-1$ или $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$.

Итак, возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$ – это 3, -1 и $\frac{1}{3}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

Ответ: $(15;1)$, $\left(6 - 12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Решение. Первое уравнение при условии $x - 12y \geqslant 0$ равносильно уравнению $(x-12y)^2 = 2xy - 12y - x + 6$, откуда $x^2 + (1-26y)x + (144y^2 + 12y - 6) = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно переменной x, имеем $D = (1-26y)^2 - 4\left(144y^2 + 12y - 6\right) = (10y-5)^2$; $x = 18y - 3$ или $x = 8y + 2$. Подставляем во второе уравнение исходной системы.

Если $x = 18y - 3$, то $360y^2 - 360y = 0$, и получаем две пары $y = 0$, $x = -3$ и $y = 1$, $x = 15$. Если $x = 8y + 2$, то $20y^2 - 20y - 13 = 0$, откуда также имеем две пары $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{10}}$, $x = 6 + 12\sqrt{\frac{2}{5}}$ и $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{10}}$, $x = 6 - 12\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Из четырёх найденных пар чисел неравенству $x \geqslant 12y$ удовлетворяют только две из них: $(15;1)$, $\left(6 - 12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

Ответ: $(0;1] \cup [9;10)$.

Решение. Заметим, что $10x - x^2 > 0$. Следовательно, $|x^2 - 10x| = 10x - x^2$. Область допустимых значений – это $x \in (0;10)$, а неравенство эквивалентно следующим:

$$\left(10x - x^2\right) + \left(10x - x^2\right)^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3\left(10x-x^2\right)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{\log_3\left(10x-x^2\right)} + 4^{\log_3\left(10x-x^2\right)} \geqslant 5^{\log_3\left(10x-x^2\right)} \quad \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3\left(10x-x^2\right)} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_3\left(10x-x^2\right)} \geqslant 1.$$

Рассмотрим неравенство $\left(\frac{3}{5}\right)^y + \left(\frac{4}{5}\right)^y \geqslant 1$. Функция $h(y) = \left(\frac{3}{5}\right)^y + \left(\frac{4}{5}\right)^y$ – убывающая (как сумма убывающих функций). Несложно заметить, что $h(2) = 1$, поэтому если $y > 2$, то $h(y) < 1$, а если $y < 2$, то $h(y) > 1$. Таким образом, это неравенство даёт $y \leqslant 2$, а исходное неравенство эквивалентно неравенству $\log_3\left(10x - x^2\right) \leqslant 2$. Отсюда получаем $0 < 10x - x^2 \leqslant 9$, $x \in (0;1] \cup [9;10)$.

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

Ответ: $R = 17$, $r = \frac{255}{16}$, $\angle AFE = 45^\circ + \frac{1}{2}\arccos\frac{8}{17}$, $S_{\triangle AEF} = 136$.

Решение. Обозначим $\angle ABC = \psi$, а радиусы Ω и ω через R и r соответственно. Пусть O и Q – центры окружностей Ω и ω соответственно; K – точка пересечения ω и AB, отличная от A.

Отметим, что $\angle BDQ = 90^\circ$ (касательная BD перпендикулярна радиусу DQ) и $\angle BCA = 90^\circ$ (угол вписан в окружность Ω и опирается на её диаметр). Значит, треугольники BDQ и BCA подобны (по двум углам). Отсюда $\frac{BD}{BQ} = \frac{BC}{BA}$, т.е. $\frac{17}{2R-r} = \frac{32}{2R}$, а значит, $R = \frac{16r}{15}$. По теореме о касательной и секущей $BD^2 = BK \cdot BA = (2R - 2r) \cdot 2R = \left(\frac{32r}{15} - 2r\right) \cdot \frac{32r}{15} = \frac{64r^2}{225}$. Следовательно, $BD = \frac{8r}{15}$, $r = \frac{15 \cdot BD}{8} = \frac{255}{16}$, $R = \frac{16r}{15} = 17$.

Далее находим углы и дуги: $\smile AC = 2\angle ABC = 2\psi$; $\angle BQD = 90^\circ - \angle QBD = 90^\circ - \psi$; $\angle AQD = 180^\circ - \angle BQD = 90^\circ + \psi$; $\angle QAD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AQD) = 45^\circ - \frac{\psi}{2}$; $\smile BE = 2\angle BAC = 90^\circ - \psi$; $\smile CE = 180^\circ - \smile AC - \smile BE = 90^\circ - \psi$. Следовательно, $\angle AFE = \frac{1}{2} \smile AE = 45^\circ + \frac{\psi}{2}$. Угол ψ известен, так как $\cos\psi = \frac{BC}{BA} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$. Значит, $\angle AFE = 45^\circ + \frac{1}{2}\arccos\frac{8}{17}$.

Перейдём к нахождению площади. Треугольник AEF прямоугольный ($\angle EAF = 90^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр), поэтому $FA = FE\cos\angle EFA$, $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot FA \cdot FE \cdot \sin\angle AFE = \frac{1}{4}FE^2\sin(2\angle AFE) = \frac{1}{4} \cdot 4R^2\sin(90^\circ + \psi) = R^2\cos\psi = 17^2 \cdot \frac{8}{17} = 136$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

Ответ: 206.

Решение. Подставляя $a = 1$ в равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, получаем $f(b) = f(1) + f(b)$, значит, $f(1) = 0$. Если же для произвольных натуральных x, y положить $a = \frac{x}{y}$, $b = y$, то получаем $f(x) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$, откуда $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$. Таким образом, чтобы вычислить значение функции f в произвольной положительной рациональной точке нам достаточно значения функции f для любого натурального числа.

Для простых чисел и единицы значения функции мы уже знаем. Для составных чисел значения функции могут быть найдены, если их разложить на простые множители и воспользоваться равенством $f(ab) = f(a) + f(b)$, например, $f(15) = f(3 \cdot 5) = f(3) + f(5) = \left[\frac{3}{4}\right] + \left[\frac{5}{4}\right] = 0 + 1 = 1$. Аналогичным образом вычисляем значения функции для $n \in [2; 25]$ и записываем их в таблицу:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f(n)$	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3
n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$f(n)$	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2

Поскольку $f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = f(1) = 0$, то из $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ следует, что $f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$. Таким образом, количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ совпадает с количеством пар, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) > 0$. Посчитаем количество пар $(x; y)$, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Ввиду того, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, нужно найти количество пар $(x; y)$ из таблицы выше, для которых $f(x) = f(y)$. Рассмотрим несколько случаев:

- $x = y$. В данном случае имеется 24 варианта.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 0$. В таблице есть 10 аргументов, при которых $f = 0$. Выбирая пару таких аргументов, первый можно выбрать 10 способами, а второй – 9 способами. Значит, количество пар такого типа равно $10 \cdot 9 = 90$.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 1$. Аналогично предыдущему пункту получаем $7 \cdot 6 = 42$ пары.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 2$. Здесь $3 \cdot 2 = 6$ пар.

- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 4$. Здесь $2 \cdot 1 = 2$ пары.

Итого, есть $24 + 90 + 42 + 6 + 2 = 164$ пар натуральных чисел $(x; y)$, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Всего имеется $24^2 = 576$ пар, поэтому тех, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, ровно $\frac{576-164}{2} = 206$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

Ответ: $a = -4$, $b = 5$.

Решение. Рассмотрим второе неравенство. Обозначим $h(x) = -32x^2 + 36x - 3$. График – парабола с ветвями вниз. На концах данного в условии промежутка имеем $h\left(\frac{1}{4}\right) = 4$, $h(1) = 1$. Так как неравенство должно выполняться на всём промежутке, то точки $M\left(\frac{1}{4}; 4\right)$ и $N(1; 1)$ могут располагаться на прямой $y = ax + b$ или выше неё. Отсюда самое “высокое” расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая MN. Составляя её уравнение по двум точкам, имеем $y = -4x + 5$ (назовём эту прямую ℓ).

График левой части неравенства – гипербола $g(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$. Заметим, что она касается прямой ℓ в точке, принадлежащей промежутку $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$. Действительно, уравнение $\frac{16x-16}{4x-5} = -4x + 5$ имеет единственное решение $x = \frac{3}{4}$, и при этом $g'(x) = -\frac{16}{(4x-5)^2}$, $g'\left(\frac{3}{4}\right) = -4$, т.е. угловой коэффициент прямой ℓ совпадает с производной функции $y = g(x)$ в их общей точке. Несложно видеть (если построить график), что на данном промежутке прямая ℓ находится выше гиперболы. Любая прямая, расположенная “ниже” прямой ℓ пересекается с гиперболой, и потому не удовлетворяет условию.

Итак, ℓ – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условию; следовательно, $a = -4$, $b = 5$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

Ответ: $LM = 2\sqrt{3}$, $R_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Решение. Пусть A, B, C, D, E – середины рёбер LN, LM, KM, MN, KL соответственно. Из теоремы о средней линии треугольника следует, что $ADCE$ и $ABDN$ – параллелограммы. Они вписаны в окружности, являющиеся сечениями сферы плоскостями ACD и LMN, поэтому эти параллелограммы – прямоугольники. Угол LNM – прямой; прямые KN и LM перпендикулярны, так как $KN \parallel AE$, $AE \perp CE$, $CE \parallel LM$.

Отметим в плоскости LMN точку K' такую, что $\triangle KLM = \triangle K'LM$, а точки N и K' лежат по разные стороны от прямой LM (треугольник $K'LM$ может быть получен из треугольника KLM поворотом вокруг прямой LM). Из равенства треугольников KLM и $K'LM$ следует, что основания их высот, опущенных на LM – это одна и та же точка (назовём её H). Плоскость HKK' перпендикулярна LM (так как $KH \perp LM$, $K'H \perp LM$), поэтому $KK' \perp LM$. Поскольку $KK' \perp LM$ и $KN \perp LM$, то плоскость $KK'N$ перпендикулярна LM и $K'N \perp LM$.

Значит, $K'LNM$ – четырёхугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями (пусть X – точка их пересечения). По теореме Пифагора $K'L^2 = K'X^2 + LX^2$, $LN^2 = LX^2 + NX^2$, $NM^2 = NX^2 + MX^2$, $K'M^2 = K'X^2 + MX^2$, следовательно, $LN^2 + K'M^2 = MN^2 + K'L^2$, откуда $LN = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{10}$. Из прямоугольного треугольника LMN находим $LM = \sqrt{LN^2 + MN^2} = 2\sqrt{3}$.

Радиус сферы, описанной около пирамиды $KLMN$, не меньше радиуса R окружности, описанной около грани BCD. Пирамида, для которой достигается равенство, существует. Докажем это. Рассмотрим сферу радиуса R и окружность – её сечение, проходящее через центр сферы. Впишем в эту окружность треугольник KLM и через прямую LM проведём плоскость, перпендикулярную плоскости этого треугольника. В сечении сферы указанной плоскостью получится окружность с диаметром LM, в которую можно вписать прямоугольный треугольник LMN. По теореме косинусов из треугольника KLM находим, что $\cos\angle LKM = \frac{KL^2+KM^2-LM^2}{2\cdot KL\cdot KM} = \frac{9+1-12}{2\cdot3\cdot1} = -\frac{1}{3}$, $\sin\angle LKM = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. По теореме синусов $R = \frac{LM}{2\sin\angle LKM} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}/3} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

11 класс, ВАРИАНТ 3

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

Ответ: $0,\ -4,\ -\frac{1}{4}$.

Решение. Преобразуя в левой части второго равенства сумму синусов в произведение, получаем $\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{4}{17}$. Подставляем в это соотношение значение синуса из первого равенства:

$$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta=-\frac{4}{17}\ \Leftrightarrow\ \cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\sin 2\beta=\dfrac{1}{\sqrt{17}},\\ \sin 2\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}.\end{array}\right.$$

Отсюда следует, что исходные равенства эквивалентны совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}},\\ \cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}},\\ \sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}},\\ \cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}},\\ \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}.\end{cases}$$

Из первой системы получаем

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}},\\ \cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}},\\ \sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha+\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Далее имеем

$$8\sin\alpha\cos\alpha+\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=-\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\Leftrightarrow 2\cos\alpha(\cos\alpha+4\sin\alpha)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0,\\ \cos\alpha=-4\sin\alpha.\end{array}\right.$$

В первом случае $\operatorname{tg}\alpha$ не существует, а во втором случае $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{4}$.

Аналогично рассматриваем вторую систему:

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}},\\ \cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}},\\ \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\sin\alpha\cos\alpha-\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=-\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\Leftrightarrow 2\sin\alpha(4\cos\alpha+\sin\alpha)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0,\\ 4\cos\alpha=-\sin\alpha.\end{array}\right.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha=0$ или $\operatorname{tg}\alpha=-4$.

Итак, возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$ – это 0, -4 и $-\frac{1}{4}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

Ответ: $(2;2)$, $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$.

Решение. Первое уравнение при условии $3y-2x \geqslant 0$ равносильно уравнению $(3y-2x)^2 = 3xy-2x-3y+2$, откуда $4x^2+(2-15y)x+(9y^2+3y-2)=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно переменной x, имеем $D=(2-15y)^2-16\left(9y^2+3y-2\right)=(9y-6)^2$; $x=3y-1$ или $x=\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}$. Подставляем во второе уравнение исходной системы.

Если $x=3y-1$, то $6y^2-8y+1=0$, и получаем две пары $y=\frac{4+\sqrt{10}}{6}$, $x=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$ и $y=\frac{4-\sqrt{10}}{6}$, $x=\frac{2-\sqrt{10}}{2}$.
Если $x=\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}$, то $3y^2-4y-4=0$, откуда также имеем две пары $y=2$, $x=2$ и $y=-\frac{2}{3}$, $x=0$.

Из четырёх найденных пар чисел неравенству $3y \geqslant 2x$ удовлетворяют только две из них: $(2;2)$, $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$.

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

Ответ: $[-8;-6)\cup(0;2]$.

Решение. Заметим, что $x^2+6x>0$. Следовательно, $|x^2+6x|=x^2+6x$. Область допустимых значений – это $x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$, а неравенство эквивалентно следующим:

$$3^{\log_4\left(x^2+6x\right)}+\left(x^2+6x\right) \geqslant \left(x^2+6x\right)^{\log_4 5} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{\log_4\left(x^2+6x\right)}+4^{\log_4\left(x^2+6x\right)} \geqslant 5^{\log_4\left(x^2+6x\right)} \quad \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4\left(x^2+6x\right)}+\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4\left(x^2+6x\right)} \geqslant 1.$$

Рассмотрим неравенство $\left(\frac{3}{5}\right)^y+\left(\frac{4}{5}\right)^y \geqslant 1$. Функция $h(y)=\left(\frac{3}{5}\right)^y+\left(\frac{4}{5}\right)^y$ – убывающая (как сумма убывающих функций). Несложно заметить, что $h(2)=1$, поэтому если $y>2$, то $h(y)<1$, а если $y<2$, то $h(y)>1$. Таким образом, это неравенство даёт $y \leqslant 2$, а исходное неравенство эквивалентно неравенству $\log_4\left(x^2+6x\right) \leqslant 2$. Отсюда получаем $0<x^2+6x \leqslant 16$, $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$.

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

Ответ: $R=\frac{39}{8}$, $r=\frac{65}{24}$, $\angle AFE=45^\circ+\frac{1}{2}\arccos\frac{12}{13}$, $S_{\triangle AEF}=\frac{351}{16}$.

Решение. Обозначим $\angle ABC=\psi$, а радиусы Ω и ω через R и r соответственно. Пусть O и Q – центры окружностей Ω и ω соответственно; K – точка пересечения ω и AB, отличная от A.

Отметим, что $\angle BDQ=90^\circ$ (касательная BD перпендикулярна радиусу DQ) и $\angle BCA=90^\circ$ (угол вписан в окружность Ω и опирается на её диаметр). Значит, треугольники BDQ и BCA подобны (по двум углам). Отсюда $\frac{BD}{BQ}=\frac{BC}{BA}$, т.е. $\frac{13}{2R-r}=\frac{18}{2R}$, а значит, $R=\frac{9r}{5}$. По теореме о касательной и секущей $BD^2=BK\cdot BA=(2R-2r)\cdot 2R=\left(\frac{18r}{5}-2r\right)\cdot\frac{18r}{5}=\frac{144r^2}{25}$. Следовательно, $BD=\frac{12r}{5}$, $r=\frac{5\cdot BD}{12}=\frac{65}{24}$, $R=\frac{9r}{5}=\frac{39}{8}$.

Далее находим углы и дуги: $\overset{\smile}{AC} = 2\angle ABC = 2\psi$; $\angle BQD = 90^\circ - \angle QBD = 90^\circ - \psi$; $\angle AQD = 180^\circ - \angle BQD = 90^\circ + \psi$; $\angle QAD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AQD) = 45^\circ - \frac{\psi}{2}$; $\overset{\smile}{BE} = 2\angle BAC = 90^\circ - \psi$; $\overset{\smile}{CE} = 180^\circ - \overset{\smile}{AC} - \overset{\smile}{BE} = 90^\circ - \psi$. Следовательно, $\angle AFE = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AE} = 45^\circ + \frac{\psi}{2}$. Угол ψ известен, так как $\cos\psi = \frac{BC}{BA} = \frac{9}{39/4} \cdot \frac{12}{13}$. Значит, $\angle AFE = 45^\circ + \frac{1}{2}\arccos\frac{12}{13}$.

Перейдём к нахождению площади. Треугольник AEF прямоугольный ($\angle EAF = 90^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр), поэтому $FA = FE\cos\angle EFA$, $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot FA \cdot FE \cdot \sin\angle AFE = \frac{1}{4}FE^2\sin(2\angle AFE) = \frac{1}{4} \cdot 4R^2\sin(90^\circ + \psi) = R^2\cos\psi = \left(\frac{39}{8}\right)^2 \cdot \frac{12}{13} = \frac{351}{16}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

Ответ: 229.

Решение. Подставляя $a = 1$ в равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, получаем $f(b) = f(1) + f(b)$, значит, $f(1) = 0$. Если же для произвольных натуральных x, y положить $a = \frac{x}{y}$, $b = y$, то получаем $f(x) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$, откуда $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$. Таким образом, чтобы вычислить значение функции f в произвольной положительной рациональной точке нам достаточно значения функции f для любого натурального числа.

Для простых чисел и единицы значения функции мы уже знаем. Для составных чисел значения функции могут быть найдены, если их разложить на простые множители и воспользоваться равенством $f(ab) = f(a) + f(b)$, например, $f(15) = f(3 \cdot 5) = f(3) + f(5) = \left[\frac{3}{4}\right] + \left[\frac{5}{4}\right] = 0 + 1 = 1$. Аналогичным образом вычисляем значения функции для $n \in [3; 27]$ и записываем их в таблицу:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(n)$	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1
n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
$f(n)$	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0	

Поскольку $f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = f(1) = 0$, то из $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ следует, что $f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$. Таким образом, количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ совпадает с количеством пар, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) > 0$. Посчитаем количество пар $(x; y)$, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Ввиду того, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, нужно найти количество пар $(x; y)$ из таблицы выше, для которых $f(x) = f(y)$. Рассмотрим несколько случаев:

- $x = y$. В данном случае имеется 25 вариантов.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 0$. В таблице есть 10 аргументов, при которых $f = 0$. Выбирая пару таких аргументов, первый можно выбрать 10 способами, а второй – 9 способами. Значит, количество пар такого типа равно $10 \cdot 9 = 90$.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 1$. Аналогично предыдущему пункту получаем $7 \cdot 6 = 42$ пары.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 2$. Здесь $3 \cdot 2 = 6$ пар.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 3$. Здесь $2 \cdot 1 = 2$ пары.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 4$. Здесь также $2 \cdot 1 = 2$ пары.

Итого, есть $25 + 90 + 42 + 6 + 2 + 2 = 167$ пар натуральных чисел $(x; y)$, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Всего имеется $25^2 = 625$ пар, поэтому тех, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, ровно $\frac{625-167}{2} = 229$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

Ответ: $a = -2$, $b = 6$.

Решение. Рассмотрим второе неравенство. Обозначим $h(x) = 8x^2 - 34x + 30$. График – парабола с ветвями вверх. На концах данного в условии промежутка имеем $h(1) = 4$, $h(3) = 0$. Так как неравенство должно выполняться на всём промежутке, то точки $M\,(1; 4)$ и $N\,(3; 0)$ могут располагаться на прямой $y = ax + b$ или ниже неё. Отсюда самое "низкое" расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая MN. Составляя её уравнение по двум точкам, имеем $y = -2x + 6$ (назовём эту прямую ℓ).

График левой части неравенства – гипербола $g(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$. Заметим, что она касается прямой ℓ в точке, принадлежащей промежутку $(1; 3]$. Действительно, уравнение $\frac{4x-3}{2x-2} = -2x + 6$ имеет единственное решение $x = \frac{3}{2}$, и при этом $g'(x) = -\frac{2}{(2x-2)^2}$, $g'\left(\frac{3}{2}\right) = -2$, т.е. угловой коэффициент прямой ℓ совпадает с производной функции $y = g(x)$ в их общей точке. Несложно видеть (если построить график), что на данном промежутке прямая ℓ находится ниже гиперболы. Любая прямая, расположенная "выше" прямой ℓ пересекается с гиперболой, и потому не удовлетворяет условию.

Итак, ℓ – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условию; следовательно, $a = -2$, $b = 6$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

Ответ: $RS = \sqrt{7}$, $R_{\min} = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

Решение. Пусть A, B, C, D, E – середины рёбер PR, RS, QS, PS, QR соответственно. Из теоремы о средней линии треугольника следует, что $ADCE$ и $ABDP$ – параллелограммы. Они вписаны в окружности, являющиеся сечениями сферы плоскостями ACD и PRS, поэтому эти параллелограммы – прямоугольники. Угол RPS – прямой; прямые PQ и RS перпендикулярны, так как $PQ \parallel AE$, $AE \perp CE$, $CE \parallel RS$.

Отметим в плоскости PRS точку Q' такую, что $\triangle QRS = \triangle Q'RS$, а точки P и Q' лежат по разные стороны от прямой RS (треугольник $Q'RS$ может быть получен из треугольника QRS поворотом вокруг прямой RS). Из равенства треугольников QRS и $Q'RS$ следует, что основания их высот, опущенных на RS – это одна и та же точка (назовём её H). Плоскость HQQ' перпендикулярна RS (так как $QH \perp RS$, $Q'H \perp RS$), поэтому $QQ' \perp RS$. Поскольку $QQ' \perp RS$ и $PQ \perp RS$, то плоскость PQQ' перпендикулярна RS и $PQ' \perp RS$.

Значит, $PRQ'S$ – четырёхугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями (пусть X – точка их пересечения). По теореме Пифагора $PR^2 = PX^2 + RX^2$, $Q'R^2 = Q'X^2 + RX^2$, $Q'S^2 = Q'X^2 + SX^2$, $PS^2 = PX^2 + SX^2$, следовательно, $PS^2 + Q'R^2 = PR^2 + Q'S^2$, откуда $PR = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{5}$. Из прямоугольного треугольника PRS находим $RS = \sqrt{PR^2 + PS^2} = \sqrt{7}$.

Радиус сферы, описанной около пирамиды $PQRS$, не меньше радиуса r окружности, описанной около грани QRS. Пирамида, для которой достигается равенство, существует. Докажем это. Рассмотрим сферу радиуса r и окружность – её сечение, проходящее через центр сферы. Впишем в эту окружность треугольник QRS и через прямую LM проведём плоскость, перпендикулярную плоскости этого треугольника. В сечении сферы указанной плоскостью получится окружность с диаметром RS, в которую можно вписать прямоугольный треугольник PRS. По теореме косинусов из треугольника PRS находим, что $\cos\angle RQS = \frac{QR^2+QS^2-RS^2}{2\cdot QR\cdot QS} = \frac{4+1-7}{2\cdot 2\cdot 1} = -\frac{1}{2}$, $\angle RQS = 120^\circ$. По теореме синусов $r = \frac{RS}{2\sin\angle RQS} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

11 класс, ВАРИАНТ 4

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

Ответ: $\frac{5}{3}$, -1, $\frac{3}{5}$.

Решение. Преобразуя в левой части второго равенства сумму синусов в произведение, получаем $\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{1}{17}$. Подставляем в это соотношение значение синуса из первого равенства:

$$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta=-\frac{1}{17}\iff \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}\iff \left[\begin{array}{l}\sin 2\beta=\dfrac{4}{\sqrt{17}},\\ \sin 2\beta=-\dfrac{4}{\sqrt{17}}.\end{array}\right.$$

Отсюда следует, что исходные равенства эквивалентны совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}},\\ \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}},\\ \sin 2\beta=-\frac{4}{\sqrt{17}}\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}},\\ \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}},\\ \sin 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}.\end{cases}$$

Из первой системы получаем

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}},\\ \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}},\\ \sin 2\beta=-\frac{4}{\sqrt{17}}\end{cases}\Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha-\frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Далее имеем

$$2\sin\alpha\cos\alpha-4\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=-\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\iff 5\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha=0\iff$$
$$\iff\left[\begin{array}{l}5\sin\alpha-3\cos\alpha=0,\\ \sin\alpha+\cos\alpha=0.\end{array}\right.$$

В первом случае $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$, а во втором случае $\operatorname{tg}\alpha=-1$.

Аналогично рассматриваем вторую систему:

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}},\\ \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}},\\ \sin 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}\end{cases}\Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha+\frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\iff$$
$$\iff 2\sin\alpha\cos\alpha+4\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=-\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\iff 3\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha-5\cos^2\alpha=0\iff$$
$$\iff\left[\begin{array}{l}3\sin\alpha-5\cos\alpha=0,\\ \sin\alpha+\cos\alpha=0.\end{array}\right.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{3}$ или $\operatorname{tg}\alpha=-1$.

Итак, возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$ – это $\frac{5}{3}$, -1 и $\frac{3}{5}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

Ответ: $(2;15)$, $\left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}};6-12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.

Решение. Первое уравнение при условии $y-6x\geqslant 0$ равносильно уравнению $(y-6x)^2=xy-6x-y+6$, откуда $y^2+(1-13x)y+(36x^2+6x-6)=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно переменной y, имеем $D=(1-13x)^2-4\left(36x^2+6x-6\right)=(5x-5)^2$; $y=9x-3$ или $y=4x+2$. Подставляем во второе уравнение исходной системы.

Если $y=9x-3$, то $90x^2-180x=0$, и получаем две пары $x=0$, $y=-3$ и $x=2$, $y=15$.
Если $y=4x+2$, то $5x^2-10x-13=0$, откуда также имеем две пары $x=1+3\sqrt{\frac{2}{5}}$, $y=6+12\sqrt{\frac{2}{5}}$ и $x=1-3\sqrt{\frac{2}{5}}$, $y=6-12\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Из четырёх найденных пар чисел неравенству $y\geqslant 6x$ удовлетворяют только две из них: $(2;15)$, $\left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}};6-12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

Ответ: $(0;1]\cup[25;26)$.

Решение. Заметим, что $26x-x^2>0$. Следовательно, $|x^2-26x|=26x-x^2$. Область допустимых значений – это $x\in(0;26)$, а неравенство эквивалентно следующим:

$$12^{\log_5\left(26x-x^2\right)}+\left(26x-x^2\right)\geqslant\left(26x-x^2\right)^{\log_5 13}\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12^{\log_5\left(26x-x^2\right)}+5^{\log_5\left(26x-x^2\right)}\geqslant 13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}\quad\Leftrightarrow\quad\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5\left(26x-x^2\right)}+\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_5\left(26x-x^2\right)}\geqslant 1.$$

Рассмотрим неравенство $\left(\frac{12}{13}\right)^y+\left(\frac{5}{13}\right)^y\geqslant 1$. Функция $h(y)=\left(\frac{12}{13}\right)^y+\left(\frac{5}{13}\right)^y$ – убывающая (как сумма убывающих функций). Несложно заметить, что $h(2)=1$, поэтому если $y>2$, то $h(y)<1$, а если $y<2$, то $h(y)>1$. Таким образом, это неравенство даёт $y\leqslant 2$, а исходное неравенство эквивалентно неравенству $\log_5\left(26x-x^2\right)\leqslant 2$. Отсюда получаем $0<26x-x^2\leqslant 25$, $x\in(0;1]\cup[25;26)$.

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

Ответ: $R=\frac{65}{2}$, $r=\frac{156}{5}$, $\angle AFE=45^\circ+\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}$, $S_{\triangle AEF}=\frac{1625}{4}$.

Решение. Обозначим $\angle ABC=\psi$, а радиусы Ω и ω через R и r соответственно. Пусть O и Q – центры окружностей Ω и ω соответственно; K – точка пересечения ω и AB, отличная от A.

Отметим, что $\angle BDQ=90^\circ$ (касательная BD перпендикулярна радиусу DQ) и $\angle BCA=90^\circ$ (угол вписан в окружность Ω и опирается на её диаметр). Значит, треугольники BDQ и BCA подобны (по двум углам). Отсюда $\frac{BD}{BQ}=\frac{BC}{BA}$, т.е. $\frac{13}{2R-r}=\frac{25}{2R}$, а значит, $R=\frac{25r}{24}$. По теореме о касательной и секущей $BD^2 = BK \cdot BA = (2R-2r)\cdot 2R = \left(\frac{25r}{12} - 2r\right)\cdot\frac{25r}{12} = \frac{25r^2}{144}$. Следовательно, $BD = \frac{5r}{12}$, $r = \frac{12\cdot BD}{5} = \frac{156}{5}$, $R = \frac{25r}{24} = \frac{65}{2}$.

Далее находим углы и дуги: $\smile AC = 2\angle ABC = 2\psi$; $\angle BQD = 90^\circ - \angle QBD = 90^\circ - \psi$; $\angle AQD = 180^\circ - \angle BQD = 90^\circ + \psi$; $\angle QAD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AQD) = 45^\circ - \frac{\psi}{2}$; $\smile BE = 2\angle BAC = 90^\circ - \psi$; $\smile CE = 180^\circ - \smile AC - \smile BE = 90^\circ - \psi$. Следовательно, $\angle AFE = \frac{1}{2}\smile AE = 45^\circ + \frac{\psi}{2}$. Угол ψ известен, так как $\cos\psi = \frac{BC}{BA} = \frac{25}{65}\cdot\frac{5}{13}$. Значит, $\angle AFE = 45^\circ + \frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}$.

Перейдём к нахождению площади. Треугольник AEF прямоугольный ($\angle EAF = 90^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр), поэтому $FA = FE\cos\angle EFA$, $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}\cdot FA\cdot FE\cdot \sin\angle AFE = \frac{1}{4}FE^2\sin(2\angle AFE) = \frac{1}{4}\cdot 4R^2\sin(90^\circ+\psi) = R^2\cos\psi = \left(\frac{65}{2}\right)^2\cdot\frac{5}{13} = \frac{1625}{4}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

Ответ: 231.

Решение. Подставляя $a = 1$ в равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, получаем $f(b) = f(1) + f(b)$, значит, $f(1) = 0$. Если же для произвольных натуральных x, y положить $a = \frac{x}{y}$, $b = y$, то получаем $f(x) = f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$, откуда $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$. Таким образом, чтобы вычислить значение функции f в произвольной положительной рациональной точке нам достаточно значения функции f для любого натурального числа.

Для простых чисел и единицы значения функции мы уже знаем. Для составных чисел значения функции могут быть найдены, если их разложить на простые множители и воспользоваться равенством $f(ab) = f(a) + f(b)$, например, $f(15) = f(3\cdot 5) = f(3) + f(5) = \left[\frac{3}{4}\right] + \left[\frac{5}{4}\right] = 0 + 1 = 1$. Аналогичным образом вычисляем значения функции для $n \in [4; 28]$ и записываем их в таблицу:

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(n)$	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0
n	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
$f(n)$	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0	1	

Поскольку $f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = f(1) = 0$, то из $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ следует, что $f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$. Таким образом, количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ совпадает с количеством пар, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) > 0$. Посчитаем количество пар $(x; y)$, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Ввиду того, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, нужно найти количество пар $(x; y)$ из таблицы выше, для которых $f(x) = f(y)$. Рассмотрим несколько случаев:

- $x = y$. В данном случае имеется 25 вариантов.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 0$. В таблице есть 9 аргументов, при которых $f = 0$. Выбирая пару таких аргументов, первый можно выбрать 9 способами, а второй – 8 способами. Значит, количество пар такого типа равно $9\cdot 8 = 72$.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 1$. Аналогично предыдущему пункту получаем $8\cdot 7 = 56$ пар.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 2$. Здесь $3\cdot 2 = 6$ пар.

- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 3$. Здесь $2 \cdot 1 = 2$ пары.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 4$. Здесь также $2 \cdot 1 = 2$ пары.

Итого, есть $25+72+56+6+2+2 = 163$ пар натуральных чисел $(x; y)$, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Всего имеется $25^2 = 625$ пар, поэтому тех, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, ровно $\frac{625-163}{2} = 231$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

Ответ: $a = -3$, $b = 4$.

Решение. Рассмотрим второе неравенство. Обозначим $h(x) = 18x^2 - 51x + 28$. График – парабола с ветвями вверх. На концах данного в условии промежутка имеем $h\left(\frac{2}{3}\right) = 2$, $h(2) = -2$. Так как неравенство должно выполняться на всём промежутке, то точки $M\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ и $N(2; -2)$ могут располагаться на прямой $y = ax + b$ или ниже неё. Отсюда самое “низкое” расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая MN. Составляя её уравнение по двум точкам, имеем $y = -3x + 4$ (назовём эту прямую ℓ).

График левой части неравенства – гипербола $g(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$. Заметим, что она касается прямой ℓ в точке, принадлежащей промежутку $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$. Действительно, уравнение $\frac{8-6x}{3x-2} = -3x + 4$ имеет единственное решение $x = \frac{4}{3}$, и при этом $g'(x) = -\frac{12}{(3x-2)^2}$, $g'\left(\frac{4}{3}\right) = -3$, т.е. угловой коэффициент прямой ℓ совпадает с производной функции $y = g(x)$ в их общей точке. Несложно видеть (если построить график), что на данном промежутке прямая ℓ находится ниже гиперболы. Любая прямая, расположенная “выше” прямой ℓ пересекается с гиперболой, и потому не удовлетворяет условию.

Итак, ℓ – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условию; следовательно, $a = -3$, $b = 4$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

Ответ: $XZ = 2\sqrt{2}$, $R_{\min} = \frac{4}{\sqrt{7}}$.

Решение. Пусть A, B, C, D, E – середины рёбер XY, XZ, TZ, YZ, TX соответственно. Из теоремы о средней линии треугольника следует, что $ADCE$ и $ABDY$ – параллелограммы. Они вписаны в окружности, являющиеся сечениями сферы плоскостями ACD и XYZ, поэтому эти параллелограммы – прямоугольники. Угол XYZ – прямой; прямые TY и XZ перпендикулярны, так как $TY \parallel AE$, $AE \perp CE$, $CE \parallel XZ$.

Отметим в плоскости XYZ точку T' такую, что $\triangle TXZ = \triangle T'XZ$, а точки Y и T' лежат по разные стороны от прямой XZ (треугольник $T'XZ$ может быть получен из треугольника TXZ поворотом вокруг прямой XZ). Из равенства треугольников TXZ и $T'XZ$ следует, что основания их высот, опущенных на XZ – это одна и та же точка (назовём её H). Плоскость HTT' перпендикулярна XZ (так как $TH \perp XZ$, $T'H \perp XZ$), поэтому $TT' \perp XZ$. Поскольку $TT' \perp XZ$ и $TY \perp XZ$, то плоскость $TT'Y$ перпендикулярна XZ и $T'Y \perp XZ$.

Значит, $T'XYZ$ – четырёхугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями (пусть P – точка их пересечения). По теореме Пифагора $T'X^2 = T'P^2 + XP^2$, $XY^2 = XP^2 + YP^2$,

$YZ^2 = YP^2 + ZP^2$, $T'Z^2 = T'P^2 + ZP^2$, следовательно, $YZ^2 + T'X^2 = XY^2 + T'Z^2$, откуда $YZ = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{5}$. Из прямоугольного треугольника XYZ находим $XZ = \sqrt{XY^2 + YZ^2} = 2\sqrt{2}$.

Радиус сферы, описанной около пирамиды $TXYZ$, не меньше радиуса R окружности, описанной около грани TXZ. Пирамида, для которой достигается равенство, существует. Докажем это. Рассмотрим сферу радиуса R и окружность – её сечение, проходящее через центр сферы. Впишем в эту окружность треугольник TXZ и через прямую XZ проведём плоскость, перпендикулярную плоскости этого треугольника. В сечении сферы указанной плоскостью получится окружность с диаметром XZ, в которую можно вписать прямоугольный треугольник XYZ. По теореме косинусов из треугольника TXZ находим, что $\cos\angle XTZ = \frac{TX^2+TZ^2-XZ^2}{2\cdot TZ\cdot TX} = \frac{2+4-8}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\sin\angle XTZ = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. По теореме синусов $R = \frac{XZ}{2\sin\angle XTZ} = \frac{2\sqrt{2}}{7/\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{7}}$.